

MATEMÁTICA 2 - Verano 2020

Práctica 5 - Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \operatorname{cos}^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \operatorname{cos}^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \operatorname{cos}^2 c \end{pmatrix}$$

4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Si A es una matriz inversible tal que tanto A como A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1?

6. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ , son reales.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible que satisfice que $CB = AC$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

9. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

y sea $b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ cualquiera. ¿Puede el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tener una única solución?

10. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} -x + ay + z & = a \\ -x + (1 - a)z & = 1 \\ -x + y + z & = a^2 \end{cases}$$

una única solución? Resolver el sistema para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

11. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite una solución no nula, para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a + 1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

12. a) Calcular el área del triángulo con vértices en el $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(-1, 3)$.

b) Calcular el volumen del paralelepípedo con 4 vértices en $(0, 0, 0)$, $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$ y $(2, 2, -1)$. ¿Cuáles son sus otros vértices?

Aplicaciones del determinante de Vandermonde

13. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

(Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.)

14. Interpolación de polinomios:

Sean $a_0, \dots, a_n \in K$ todos distintos y $b_0, \dots, b_n \in K$ cualesquiera. Probar que existe un único polinomio $P \in K[X]$ de grado menor o igual que n (o nulo) que satisface simultáneamente las condiciones

$$P(a_0) = b_0, P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$